

**CONFÉRENCE-DÉBAT**  
**CONFERENCE-DEBATE**

## Vers une théorie énergétique de la rupture fragile

Gilles Francfort, Jean-Jacques Marigo

LPMTM (UPR-CNRS 9001), Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France

Note présentée par Jean-Baptiste Leblond et Yves Pomeau.

### Résumé

La théorie de la rupture fragile basée sur le critère de Griffith (notions de taux de restitution élastique  $G$  et de ténacité  $k$ ) présente trop de lacunes (ne serait-ce que la question de l'amorçage) pour pouvoir être considérée comme la bonne modélisation du phénomène, utilisable dans toutes les situations. Faut-il pour autant renoncer à une théorie macroscopique de la rupture ? Bien qu'on puisse être tenté de répondre par l'affirmative en invoquant la diversité et la complexité des phénomènes à l'échelle de la microstructure, nous persistons à croire que les effets structurels jouent un rôle important et nous proposons donc d'aménager la théorie de Griffith pour la rendre fonctionnelle dans une gamme plus large de situations, sans toucher aux fondamentaux. Les exemples qui suivent s'efforceront de montrer que le cadre énergétique rénové peut être la base d'une théorie exploitable par l'Ingénieur et capable de réconcilier des points de vue jusqu'ici divergents. *Pour citer cet article : G. Francfort, J.-J. Marigo, C. R. Mécanique 330 (2002) 225–233.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fatigue / élasticité / énergie de surface / fissure / décohésion / rupture / calcul des variations**

### Towards an energetic theory of brittle fracture

### Abstract

The drawbacks of the classical theory of brittle fracture, based on Griffith's criterion – a notion of critical energy release rate –, and a fracture toughness  $k$ , are numerous (think for instance the issue of crack initiation) and penalize its validity as a good model. Are all attempts at building a macroscopic theory of fracture doomed? The variety and complexity of micromechanical phenomena would suggest that this is indeed the case. We believe however that structural effects still preside over fracture and consequently propose to modify slightly Griffith theory without altering its fundamental components so that it becomes amenable to the widest range of situations. The examples presented here will demonstrate that a revisited energetic framework is a sound basis for a theory which can be used at the engineering level and which reconciles seemingly contradictory viewpoints. *To cite this article: G. Francfort, J.-J. Marigo, C. R. Mécanique 330 (2002) 225–233.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fatigue / elasticity / surface energy / crack / debonding / fracture / calculus of variations**

---

Adresse e-mail : marigo@lpmtm.univ-paris13.fr (J.-J. Marigo).

## 1. La problématique

Il est hors de propos de présenter dans cette Note tous les ingrédients de notre théorie énergétique de la rupture, aussi nous contenterons-nous d'en illustrer les principaux aspects sur deux exemples que nous considérons comme particulièrement significatifs, à savoir *l'essai de traction* et *l'essai d'arrachement*. Considérons un cylindre creux, de longueur  $2L$ , de section circulaire de rayon intérieur  $R_f$  et de rayon extérieur  $R$ , constitué d'un matériau élastique fragile (notion qui sera précisée par la suite). Le premier cas examiné,  $Cas(a)$ , est un essai de traction simple sur ce cylindre homogène, voir Fig. 1a. Puis nous considérons l'éprouvette composite constituée du cylindre précédent dans le creux duquel est (initialement) collée une armature supposée, elle, élastique mais *incassable*. On envisage deux essais pour cette éprouvette composite : un essai de traction simple, le  $Cas(b)$ , et un essai d'arrachement, le  $Cas(c)$ . Ces deux essais se distinguent simplement par le fait que la traction est exercée à la fois sur l'armature et la matrice dans le  $Cas(b)$ , mais seulement sur l'armature dans le  $Cas(c)$ , voir Figs. 1b–c. Dans les 3 cas, les tractions peuvent être réalisées soit à déplacements, soit à forces contrôlés.

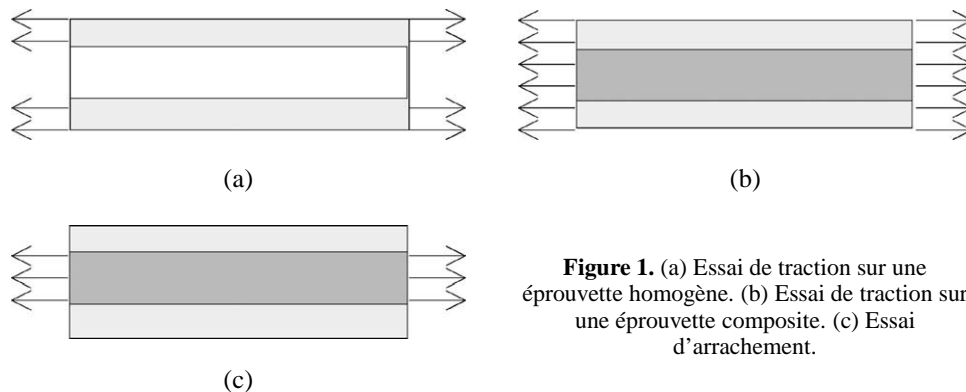
Que sait-on d'un point de vue expérimental? On peut tenir comme un fait (tout du moins pour des matériaux dont le comportement fragile est dominant) que dans le  $Cas(a)$  l'éprouvette se rompt brutalement,<sup>1</sup> lorsque la traction  $t$  atteint une valeur critique  $t_c$ , en deux morceaux, la fracture se faisant suivant une section transversale dont la position longitudinale est essentiellement fixée par les imperfections, cf. Fig. 2a. Dans le  $Cas(b)$ , si l'on s'en réfère à [1] et à leurs expériences faites sur des stratifiés, un mécanisme d'endommagement fréquemment observé est l'apparition brutale de fissures transverses dans la matrice, réparties périodiquement, cf. Fig. 2b. Dans le  $Cas(c)$ , par contre, c'est la décohérence de l'armature qui est le phénomène majeur, cette décohérence pouvant évoluer de façon brutale ou progressive avec le paramètre de traction, suivant le type de contrôle, cf. [2] et la Fig. 2c.

En dépit de leur caractère schématique et du fait de leur caractère générique, tenons pour données expérimentales les mécanismes de fissuration représentés sur la Fig. 2 dans les différents cas. Une théorie de la rupture se voulant robuste doit savoir en rendre compte. Dans l'analyse théorique qui suit les hypothèses suivantes sont adoptées, soit par nécessité, soit par souci d'alléger la présentation.

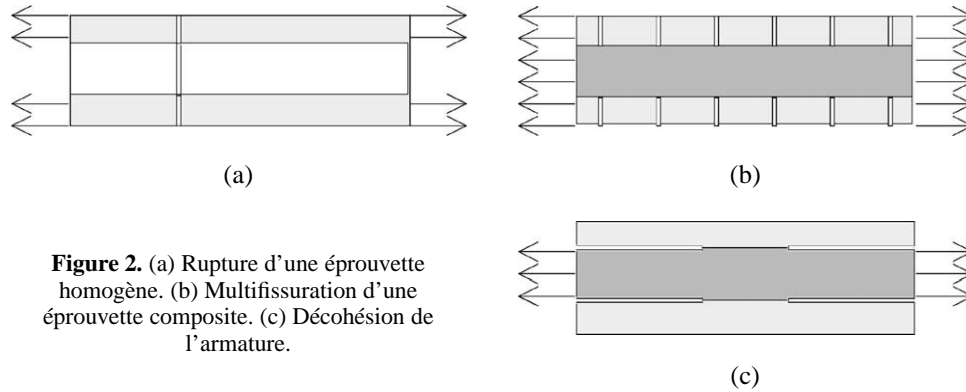
**HYPOTHÈSE.** – Seules apparaissent des fissures axisymétriques, le problème est donc bidimensionnel. La fibre et la matrice ont un comportement élastique linéaire et isotrope, de modules de Young respectifs  $E_f$  et  $E_m$ , de même coefficient de Poisson  $\nu$ . La ténacité, i.e. l'énergie nécessaire pour créer une fissure d'aire unité, satisfait les conditions suivantes :

$Cas(a)$ . La matrice a une ténacité  $k_m$ ,  $0 < k_m < +\infty$  ;

$Cas(b)$ . La matrice et l'interface armature-matrice ont une ténacité  $k_m$ ,  $0 < k_m < +\infty$ , alors que l'armature est incassable (ténacité infinie) ;



**Figure 1.** (a) Essai de traction sur une éprouvette homogène. (b) Essai de traction sur une éprouvette composite. (c) Essai d'arrachement.



**Figure 2.** (a) Rupture d'une éprouvette homogène. (b) Multifissuration d'une éprouvette composite. (c) Décohésion de l'armature.

*Cas(c)*. L'interface armature-matrice a une ténacité  $k_i$ ,  $0 < k_i < +\infty$ , alors que la matrice et l'armature sont incassables (ténacité infinie).

On adopte un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de pôle le centre du cylindre.

## 2. Les insuffisances de la théorie de Griffith

Considérons d'abord la théorie de Griffith [3], i.e. la théorie de la rupture fragile s'attachant à décrire l'évolution de fissures dans une structure où le matériau constitutif est supposé (linéairement) élastique en s'appuyant sur un critère de propagation basé sur la notion de taux de restitution d'énergie critique. Ce critère s'écrit  $G \leq k$ ,  $G$  étant le taux d'énergie élastique restitué par la structure lors d'un accroissement (virtuel) « unitaire » de la fissure à chargement fixé, alors que  $k$  désigne la ténacité. Remarquons que dans les 3 cas la structure est initialement non fissurée. Il y a bien une singularité sur les deux cercles extrêmes ( $r = R$ ,  $z = \pm L$ ) de l'interface matrice-armature dans le *Cas(b)* (et éventuellement le *Cas(c)*), mais cette singularité est *faible*. En conséquence, le taux de restitution d'énergie due à une fissure naissante est *nul*, quel que soit le niveau de chargement, cf. [4] et [5]. La théorie de Griffith se heurte immédiatement à la question de l'amorçage : s'il n'y a pas de fissure initiale (en fait, de singularité forte), aucune fissure ne peut apparaître. Dans les 3 cas la structure reste toujours saine, ce qui n'est pas conforme à l'expérience. Pour contourner cette difficulté, on invoque le plus souvent la présence inévitable de défauts préexistants, hors donc du champ de la mécanique de la rupture. La question de l'amorçage est ainsi résolue au prix d'une forte dépendance du chargement critique vis à vis de la position, de la taille et de l'orientation du défaut critique. Se pose alors la question du trajet spatio-temporel du défaut se propageant. Il faut nécessairement joindre au critère de Griffith un critère de branchement pour fixer la direction de propagation. Si dans les situations d'élasticité plane, homogène et isotrope le consensus semble se faire sur le critère du  $k_2^* = 0$ , i.e. celui de la propagation en *mode I*, cf. [6] – encore que celui du  $G_{\max}$  ait quelques partisans –, d'autres situations comme l'élasticité plane, homogène et *anisotrope*, ou l'élasticité *antiplane*, ou encore le cas d'une fissure d'interface entre plusieurs matériaux sont autant de situations où on ne peut plus utiliser le critère du  $k_2^* = 0$ . C'est donc que ce critère découle d'un principe plus général qui impliquerait que la fissure doit se propager en *mode I* pur en élasticité plane, homogène et isotrope, mais qui fournirait d'autres conditions de branchement dans les autres situations. Examinons maintenant la question du trajet « temporel », i.e. de l'évolution de la fissuration avec le chargement. Dans les *Cas(a)* et *Cas(b)* où la propagation est brutale, on ne voit pas comment on pourrait déduire du critère de Griffith l'état de fissuration juste *après* le chargement critique où la discontinuité a lieu. Ce critère n'est adapté qu'aux fissurations progressives. Il manque donc ici aussi un principe permettant de gérer aussi ces discontinuités « temporelles ».

Ces insuffisances de la théorie de Griffith sont pour l'essentiel connues de longue date et de multiples aménagements tentent d'y remédier. Citons le détour par la mécanique de l'endommagement pour la

question de l’amorçage, l’introduction de critères additionnels pour le branchement et la question des trajets spatiaux, une mécanique de la rupture dite incrémentale avec sa panoplie de critères pour la question des évolutions brutales de la fissuration. Le manque de lien et d’unité est frappant. Nous croyons quant à nous à une théorie macroscopique de la rupture capable de rendre compte de ces 3 aspects.

### 3. L’approche « Énergie de Griffith et minima globaux »

Notre première tentative, cf. [4], a consisté, tout en conservant l’hypothèse de proportionnalité de l’énergie de surface avec l’aire de la fissure, à abandonner son critère  $G \leq k$  au profit d’un principe de minimisation d’énergie. Le lecteur désireux d’en connaître la formulation précise générale pourra se référer à [4]. Notons simplement que les conditions d’irréversibilité de la fissuration ne seront pas écrites explicitement dans les exemples traités ci-dessous, mais les solutions trouvées les satisferont automatiquement.

Illustrons cette nouvelle formulation dans les 3 cas, à déplacements contrôlés. Cela conduit aux problèmes suivants,  $i = a, b$  ou  $c$  :

$$\min_{\mathbf{u}: u_z = \pm t \text{ sur } \mathbf{S}_i \times \{\pm L\}} \int_{\Omega_i \setminus \mathcal{S}(\mathbf{u})} \frac{1}{2} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{S}(\mathbf{u})} k_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{S} \quad (1)$$

$\mathcal{S}(\mathbf{u})$  désignant l’ensemble des points de discontinuité de  $\mathbf{u}$ . Le premier terme représente l’énergie élastique, le deuxième l’énergie de surface. La seule régularité exigée de  $\mathbf{u}$  est que l’on puisse donner un sens à (1), ce qui conduit naturellement à considérer des fonctions du type à variation bornée. En contrepartie, comme la fissure peut apparaître en  $z = \pm L$ , les conditions aux limites en déplacement doivent être comprises en un sens affaibli, cf. [4]. Les différents cas se distinguent par le domaine  $\Omega_i$ , l’élasticité  $\mathbf{A}_i(\mathbf{x})$ , la ténacité  $k_i(\mathbf{x})$  et la section  $\mathbf{S}_i$  où les déplacements axiaux sont imposés. Une fois le minimiseur *global*  $\mathbf{u}_i$  trouvé, on en déduit l’état de fissuration de la structure comme étant  $\mathcal{S}(\mathbf{u}_i)$ .

Contrairement au critère  $G \leq k$ , la loi *unique* (1) rend compte d’évolutions spatio-temporelles quelconques. De plus l’amorçage se prévoit aisément. Plus le chargement  $t$  augmente et plus, à fissuration constante, l’énergie élastique augmente. A partir d’un certain seuil la structure préférera se fissurer, ce qui lui coûtera un peu d’énergie de surface, mais lui permettra de diminuer son énergie élastique. En contrepartie cet amorçage est *brutal*, une (ou plusieurs !) fissure(s) de longueur *finie* apparaissant à une valeur critique du chargement. L’amorçage ne se fait plus suivant le critère de Griffith, mais suivant un critère dit de Griffith *généralisé* sur lequel nous reviendrons. Plusieurs résultats généraux de ce type sont prouvés dans [4]. Nous allons les retrouver dans les différents cas.

*Cas(a)*. Il est traité intégralement dans [4] ; rappelons les principaux résultats. On montre, en envisageant *tous* les états de fissuration possibles (en fait tous les  $u$  et donc tous les  $\mathcal{S}(u)$ ) et en *estimant* l’énergie élastique de la structure correspondante, que l’éprouvette se rompt, conformément à l’observation, *brutalement* et suivant une section transverse de position arbitraire, lorsque le niveau du déplacement imposé atteint la valeur critique

$$t_c = \sqrt{k_m L / E_m} \quad (2)$$

*Cas(b)*. Ce cas ne peut pas être traité de façon exacte, situation courante dès lors que la géométrie ou le chargement se compliquent. On doit donc faire appel à des approximations numériques. Un avantage de la formulation énergétique est que l’on dispose maintenant d’une méthode numérique efficace pour approcher les minima de (1), voir [7–9]. Par analogie avec des problèmes apparaissant en segmentation d’image, [10], pour lesquels [11] montre que le problème de minimisation (1) avec « surfaces de discontinuité libres » peut être approché par des problèmes de minimisation « réguliers », on traite numériquement le problème

régularisé suivant

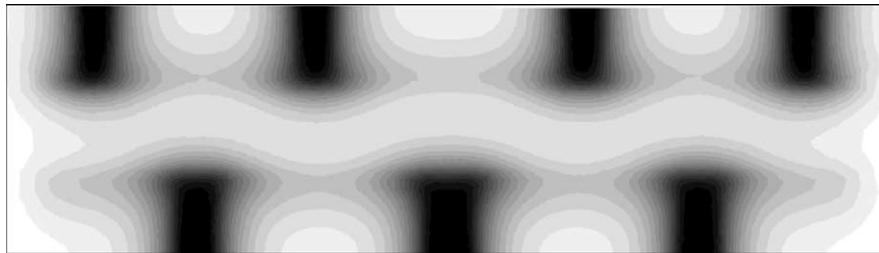
$$\min_{\substack{\mathbf{u}: u_z|_{z=\pm L}=\pm t \\ \alpha \in [0,1]}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1-\alpha)^2 \mathbf{A}_i \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} k \left( \frac{\alpha^2}{4h} + h \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) \, d\mathbf{x} \quad (3)$$

où  $u$  n'est plus maintenant discontinu, le champ  $\alpha$  ayant la charge d'indiquer les zones de fissuration comme étant celles où il est voisin de 1. Dans (3),  $h$  est le petit paramètre de perturbation grâce auquel on établit des résultats de convergence d'une formulation vers l'autre. En utilisant (1) pour résoudre numériquement le problème de traction de la plaque composite, il est montré dans [12] qu'à partir d'un certain chargement  $t_e$ , une série de fissures transverses, traversant la matrice, réparties périodiquement dans chaque couche, en quinconce d'une couche à l'autre apparaissent brutalement, cf. Fig. 3. Ce scénario comporte exactement les 3 phénomènes (amorçage brutal d'une fissuration multiple) que la théorie de Griffith ne sait pas traiter et il est qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux.

*Cas(c)*. Bien que, par hypothèse sur la ténacité, la fissuration ne puisse se développer qu'à l'interface, le problème de l'essai d'arrachement  $(1)_c$  ne peut pas être résolu exactement. On peut toutefois construire une approximation explicite de la solution par des méthodes asymptotiques si l'on considère que le rapport d'élanement  $\epsilon = R/L$  est un petit paramètre. Un atout majeur de la formulation énergétique est d'être « transportable » dans les réductions dimensionnelles. On peut ainsi en adaptant les techniques de  $\Gamma$ -convergence, classiques en élasticité (cf. [13]), au cadre élastique fragile montrer que le champ de déplacement solution de  $(1)_c$  converge (dans un sens que nous ne précisons pas ici) vers un déplacement du type Navier–Bernoulli d'extension axiale dans l'armature,  $u_f(z)\mathbf{e}_z$ , et un autre du même type dans la matrice  $u_m(z)\mathbf{e}_z$ . Ces champs, différant aux points  $z$  où l'armature et la matrice sont décollées, sont obtenus en résolvant le problème de minimisation d'énergie « limite » :

$$\min_{(u_f, u_m) \in H^1(-L, L)^2, u_f(\pm L) = \pm t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-L}^L (E_f S_f u_f'^2 + E_m S_m u_m'^2) \, dz + 2\pi R_f k_i \mathcal{H}^1(\mathcal{S}(u)) \right\} \quad (4)$$

où  $\mathcal{S}(u) = \{z \in [-L, L] \mid u_f(z) \neq u_m(z)\}$  désigne maintenant l'ensemble des cotes de décohéation et  $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}(u))$  sa longueur. L'hypothèse que l'armature et la matrice ont le même coefficient de Poisson simplifie sensiblement l'expression de l'énergie d'extension en faisant intervenir simplement les modules  $E_f S_f$  et  $E_m S_m$ . La résolution de ce problème 1D de poutre ne présente pas de difficulté. On commence par montrer que la décohéation ne peut avoir lieu qu'à partir des extrémités et qu'elle est symétrique, i.e.  $\mathcal{S}(u) = [-L, -L + \ell] \cup [L - \ell, L]$ , la longueur de décohéation  $\ell$  restant à déterminer. En calculant les champs  $u_f$  et  $u_m$  pour chaque valeur possible de  $\ell$ , on obtient la valeur de l'énergie correspondante qu'il



**Figure 3.** Multifissuration transversale brutale d'un composite : Simulation numérique obtenue par Bilteryst et Bourdin [12], à partir de la formulation régularisée (3). Plus une zone est sombre et plus la valeur de  $\alpha$  y est proche de 1, valeur limite correspondant à un matériau totalement « endommagé ».

ne reste plus qu'à minimiser, ce qui conduit à résoudre le problème suivant :

$$\min_{\ell \in [0, L]} \{t^2 W_0(\ell) + 4\pi R_f k_i \ell\}, \quad \text{avec} \quad W_0(\ell) = \frac{(E_f S_f + E_m S_m) E_f S_f}{L E_f S_f + \ell E_m S_m} \quad (5)$$

De la stricte convexité de  $W_0$  par rapport à  $\ell$ , on tire aisément que le minimiseur  $l_0(t)$  de (5) est nul, i.e. il n'y a pas de décohésion, tant que  $t$  est inférieur à une valeur critique  $t_c^0$ , puis croît linéairement avec  $t$ , de 0 à  $L$ , quand  $t$  croît de  $t_c^0$  à  $t_d^0$ , après quoi la décohésion est complète. Ces charges d'amorçage et de décohésion sont données par

$$t_c^0 = \sqrt{\frac{4\pi k_i R_f E_f S_f}{E_m S_m (E_f S_f + E_m S_m)}} L, \quad t_d^0 = \sqrt{\frac{4\pi k_i R_f (E_f S_f + E_m S_m)}{E_m S_m E_f S_f}} L \quad (6)$$

En fait, l'évolution de la décohésion fournie par le modèle limite suit la loi de Griffith. Ce résultat peut paraître surprenant, en particulier concernant l'amorçage. En effet, il est montré dans [4] que, du fait de l'absence de singularité forte dans la solution du problème élastique posé sur la poutre saine, l'amorçage de la décohésion est nécessairement brutal, une fissure de longueur finie  $\ell_c^\epsilon$  devant apparaître à un instant fini  $t_c^\epsilon$ . La contradiction tient à ce que l'approximation  $W_0(\ell)$  de l'énergie élastique n'est pas suffisamment précise pour des faibles valeurs de  $\ell$ , car elle ne tient pas compte des couches limites. Notons  $W_\epsilon(\ell)$  sa valeur exacte. Il s'agit donc de minimiser, pour  $t$  donné,  $t^2 W_\epsilon(\ell) + 4\pi R_f k_i \ell$ . Le résultat dépend de façon essentielle de la convexité de  $W_\epsilon$ . Or, l'absence de singularité forte quand  $\ell = 0$  fait que  $W'_\epsilon(0) = 0$ , et, comme  $W_\epsilon$  est décroissante, elle est nécessairement concave au voisinage de  $\ell = 0$ . Par contre, pour des valeurs de  $\ell$  grandes devant  $\epsilon$ , les effets de couche limite se font moins sentir et  $W_\epsilon$  retrouve la convexité de  $W_0$ . En conséquence, on peut montrer, cf. [12] et [14], que l'amorçage est effectivement brutal, après quoi la décohésion est progressive et suit la loi de Griffith. La longueur et la charge d'amorçage  $\ell_c^\epsilon$  et  $t_c^\epsilon$  sont données par :

$$t_c^{\epsilon 2} (W_\epsilon(0) - W_\epsilon(\ell_c^\epsilon)) = 4\pi R_f k_i \ell_c^\epsilon, \quad -t_c^{\epsilon 2} W'_\epsilon(\ell_c^\epsilon) = 4\pi R_f k_i \quad (7)$$

La première relation est le critère de Griffith généralisé. Il exprime que, bien que l'amorçage soit brutal, il y a *continuité* de l'énergie totale durant ce saut de fissuration, la restitution *finie* d'énergie élastique fournissant juste l'énergie nécessaire pour créer la surface *finie* de décohésion. La deuxième relation s'interprète comme étant le critère de Griffith classique, *mais* à condition de calculer le taux de restitution d'énergie élastique non pas *avant* mais juste *après* l'amorçage. Il faut bien noter que ces deux relations sont directement issues du principe de minimisation de l'énergie et constituent en quelque sorte des *conditions nécessaires d'optimalité*, elles ne sont pas des lois complémentaires introduites de façon *ad hoc*.

L'utilisation du principe de moindre énergie en adoptant l'hypothèse de Griffith relative à l'énergie de surface a donc conduit dans les 3 cas à des résultats qualitatifs très satisfaisants. Cette approche est cependant déficiente car :

1. Elle conduit à des effets d'échelle non satisfaisants. Ainsi dans le *Cas(a)* la contrainte à rupture de l'éprouvette dépend de sa longueur comme  $1/\sqrt{L}$ , ce qui n'est pas conforme à l'observation. Ce défaut est imputable à l'hypothèse de Griffith sur l'énergie de surface qui introduit une longueur caractéristique du matériau, par exemple le rapport  $k/E$ , en mettant en balance des énergies de surface et des énergies de volume. Cet effet d'échelle se retrouve aussi dans le *Cas(c)* : on le voit dans la dépendance en  $R$  de  $t_c^0$  dans (6).
2. Elle ne fonctionne généralement pas à forces imposées. En effet, lorsque les forces sont imposées, il faut introduire leur potentiel dans l'expression de l'énergie ce qui conduit dans le *Cas(a)* à ajouter le terme  $-t \int_{S_f \times \{L\}} u_z dS + t \int_{S_f \times \{-L\}} u_z dS$ . Mais alors, dès que  $t > 0$ , l'énergie n'est plus bornée inférieurement, le problème de minimisation n'a plus de solution. Tenter d'y remédier en remplaçant

la condition (trop) forte de minimum global par celle (plus délicate) de minimum local, sans toucher à l'énergie de surface de Griffith conduirait inévitablement à un échec à cause de la question de l'amorçage, la réponse élastique étant toujours un minimum local en l'absence de singularité forte. Il faut donc se résoudre à changer les deux.

#### 4. L'approche « Énergie de Barenblatt et minima locaux »

On considère maintenant une énergie de surface qui dépend de façon non triviale du saut de déplacement  $\delta = \llbracket u \rrbracket$ . Les formes à adopter pour cette fonction  $\delta \rightarrow \kappa(\delta)$  sont suggérées par les potentiels d'interaction à l'échelle atomique, cf. Fig. 4, [15,16]. L'idée d'une telle approche remonte à Barenblatt [17]. Toutefois ses premières utilisations dans le cadre de minimisation d'énergie sont très récentes, cf. [16,18–21]. Il faut de plus se résoudre à chercher des minima locaux (et non plus globaux) de l'énergie (sinon on ne peut toujours pas travailler à forces imposées), ce qui pose le problème du choix d'une norme pour préciser la notion de localité.

A titre d'exemple, approchons le  $Cas(a)$  de traction simple par le problème 1D d'une barre de longueur  $2L$  soumise à une force  $\pm F$  à l'extrémité  $\pm L$  qui se formule ainsi

$$\min_{u:u(0^-)=0, \llbracket u \rrbracket \geq 0} \text{local} \frac{1}{2} \int_{-L}^L E_m S_m u'(z)^2 dz + \sum_{z \in \mathcal{S}(u)} \kappa(\llbracket u \rrbracket(z)) S_m - F(u(L+) - u(-L-)) \quad (8)$$

en prenant pour norme *naturelle* celle des fonctions à variation bornée, cf. [22]. Le principal avantage d'une énergie de surface du type Barenblatt est de faire apparaître un critère d'amorçage en contraintes. En effet, on montre dans [16] ou [18] que, pour qu'un champ  $u$  soit un minimum local il faut que les contraintes associées  $\sigma = Eu'$  restent inférieures à  $\sigma_r = \kappa'(0)$ . Autrement dit la pente à l'origine dans l'énergie de Barenblatt n'est rien d'autre que la contrainte à rupture du matériau mesurée expérimentalement. Les 3 grandeurs caractéristiques du comportement mécanique d'un matériau que sont le module d'Young, la contrainte de rupture et la ténacité ont été intégrées dans un même modèle. L'effet d'échelle parasite qui apparaissait avec le choix de l'énergie de Griffith a disparu. D'autre part, contrairement à l'approche « énergie de Griffith et minimum global », on peut maintenant envisager n'importe quel type de chargement.

Paradoxalement l'une des faiblesses de l'approche avec énergie de Barenblatt pourrait être sa souplesse. Par exemple, comment choisir la fonction  $\kappa(\llbracket u \rrbracket)$ ? En plusieurs dimensions, les possibilités sont très nombreuses et on ne pourra pas se passer de modèles phénoménologiques. En une dimension, si  $\kappa'(0)$  et  $\kappa(+\infty)$  sont deux valeurs facilement accessibles expérimentalement, le reste de la courbe l'est moins. À la vue des premières applications, voir [18–20] et [21], les propriétés de concavité de  $\kappa$  jouent un rôle essentiel quant à la « morphologie » des fissures. De plus, si le paramètre  $\kappa'(0)$  joue un rôle essentiel dans le  $Cas(a)$ , par contre, on ne voit plus celui tenu par la ténacité  $k = \kappa(\infty)$ . C'était un peu attendu compte

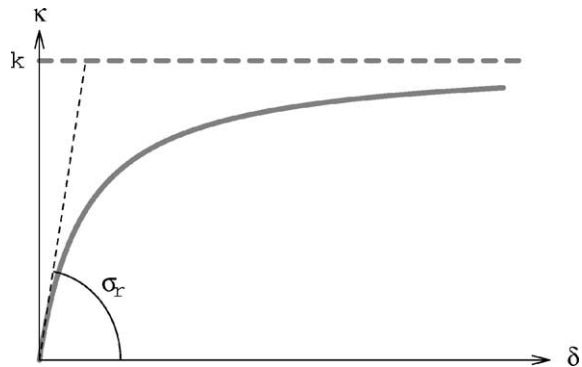


Figure 4. Énergie de surface du type Barenblatt.

tenu du caractère notoirement brutal de la rupture dans un essai de traction. Qu'en est-il dans une autre situation ? On a un premier élément de réponse en analysant le  $Cas(c)$ .

Envisageons maintenant le  $Cas(c)$ , i.e. l'essai d'arrachement, que nous approchons encore une fois par un problème 1D. Le problème s'écrit maintenant

$$\min_{(u_f, u_m) \in H^1(-L, L)^2, u_f(\pm L) = \pm t} \int_{-L}^L \left( \frac{1}{2} E_f S_f u_f'^2 + \frac{1}{2} E_m S_m u_m'^2 + 2\pi R_f \kappa (|u_f - u_m|) \right) dz \quad (9)$$

qui ne diffère de (4) que par le terme d'énergie de surface et par le fait que l'on cherche un minimum local (au sens de la norme de  $H^1$ ). Notons toutefois que la discontinuité de déplacement est purement tangentielle et que  $\kappa'(0)$  représente la contrainte à rupture en cisaillement. Moyennant des hypothèses raisonnables sur  $\kappa$ , en particulier si elle est une fonction croissante et différentiable de  $\delta$ , on peut résoudre exactement ce problème. On montre ainsi qu'il n'existe qu'un minimum *local* et que c'est, en fait, le minimum *global*, que la décohésion s'initie aux extrémités dès la mise en charge<sup>2</sup> – et non pas à partir d'un chargement critique — sur une longueur qui dépend de  $\kappa'(0)$ . De plus, plus la barre est longue, plus la solution est proche de celle de (4), qui – elle – ne dépend que de la ténacité, i.e. de  $\kappa(\infty)$ . Autrement dit, on est lors de l'essai d'arrachement dans la situation opposée à celle rencontrée dans l'essai de traction : la ténacité joue un rôle majeur, la contrainte à rupture (en cisaillement) un moindre. D'un point de vue expérimental, cela signifie que l'essai de traction pourra servir à identifier la contrainte à rupture (du matériau), alors que l'essai d'arrachement la ténacité (de l'interface).

Il reste à ce jour à rendre compte de l'irréversibilité dans le modèle : à partir de quand décide-t-on que la fissuration est irréversible alors que l'on considère que les lèvres interagissent ?

## 5. Conclusion

Ces premiers remarques suffisent, nous l'espérons, à montrer que la recherche des minima locaux avec une énergie de surface du type Barenblatt aboutit à une « théorie macroscopique de la rupture » qui semble se confronter avantageusement à l'expérience. Son utilisation systématique dans divers problèmes d'ingénierie des structures et le réalisme de ses prédictions devraient permettre dans un avenir proche de statuer sur sa validité.

<sup>1</sup> Dans toute la suite, la fissuration sera dite *brutale* à un niveau de chargement  $t$  si l'état de fissuration en tant que fonction du niveau de chargement est discontinue en  $t$ , alors qu'elle sera dite *progressive* si la fonction est continue.

<sup>2</sup> et même sur toute la longueur si  $\kappa'(0) = 0$ , propriété adoptée dans les *modèles de forces cohésives*.

## Références bibliographiques

- [1] K.W. Garrett, J.E. Bailey, Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester, *J. Materials Sci.* 12 (1977) 157–168.
- [2] V.T. Bechett, N.R. Sottos, Application of debond length measurements to examine the mechanics of fiber pushout, *J. Mech. Phys. Solids* 46 (1998) 1675–1697.
- [3] A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* CCXXI (1920) 163–198.
- [4] G.A. Francfort, J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids* 46 (8) (1998) 1319–1342.
- [5] D. Leguillon, Calcul du taux de restitution d'énergie au voisinage d'une singularité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* 309 (1989) 945–950.
- [6] M. Amestoy, Propagations de fissures en élasticité plane, Thèse d'État, Paris, 1987.
- [7] B. Bourdin, Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture. Théorie et applications numériques, Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord, 1998.



- [8] B. Bourdin, A. Chambolle, Implementation of an adaptative finite element approximation of the Mumford–Shah functional, *Numer. Math.* 85 (2000) 609–646.
- [9] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.-J. Marigo, Numerical experiments in revisited brittle fracture, *J. Mech. Phys. Solids* 48 (2000) 797–826.
- [10] D. Mumford, J. Shah, Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.* 42 (1989) 577–685.
- [11] L. Ambrosio, V.M. Tortorelli, Approximations of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence, *Comm. Pure Appl. Math.* XLIII (1990) 999–1036.
- [12] F. Bilteryst, Une approche énergétique de la décohésion et de la multifissuration dans les composites, Thèse de doctorat de l’Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2000.
- [13] G. Geymonat, F. Krasucki, J.-J. Marigo, Stress distribution in anisotropic elastic composite beams, in: P.G. Ciarlet, E. Sanchez-Palencia (Eds.), *Applications of Multiple Scalings in Mechanics*, Masson, 1987, pp. 118–133.
- [14] F. Bilteryst, J.-J. Marigo, Amorçage de la décohésion dans l’essai d’arrachement, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIB* 327 (1999) 977–983.
- [15] A. Braides, G. Dal Maso, A. Garroni, Variational formulation of softening phenomena in fracture mechanics: the one dimensional case, *Arch. Rational Mech. Anal.* (1999).
- [16] M. Charlotte, Modèles discrets de rupture, Thèse de doctorat de l’Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.
- [17] G.I. Barenblatt, The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Adv. Appl. Mech.* 7 (1962) 55–129.
- [18] M. Charlotte, G. Francfort, J.-J. Marigo, L. Truskinovsky, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem: comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models, in: A. Benallal (Ed.), *Proceedings of the Symposium on “Continuous Damage and Fracture”*, Cachan 2000, The Data Science Library, Elsevier, Paris, 2000, pp. 7–12.
- [19] G. Del Piero, One dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations, in: P. Argoul, M. Frémond (Eds.), *Proceedings of the IUTAM Symposium “Variations de domaines et frontières libres en mécanique”*, 1997, Kluwer Academic, Paris, 1999, pp. 197–202.
- [20] G. Del Piero, L. Truskinovsky, Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity, *Internat. J. Solids Structures* (2001) (in press).
- [21] L. Truskinovsky, Fracture as a phase transition, in: R.C. Batra, M.F. Beatty (Eds.), *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*, CIMNE, Barcelona, 1996, pp. 322–332.
- [22] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l’analyse fonctionnelle*, Mir, Moscou, 1974.