PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA MÉCANIQUE. — *Homogénéisation de milieux viscoélastiques linéaires de Kelvin-Voigt.* Note (*) de **Gilles Francfort, Dominique Leguillon** et **Pierre Suquet,** présentée par Georges Duvaut.

On réexamine l'homogénéisation d'un solide viscoélastique linéaire de Kelvin-Voigt, dans son comportement quasi-statique. Le tenseur des contraintes homogénéisées se compose d'un terme élastique, d'un terme viscoélastique à mémoire courte, et d'un terme à mémoire longue, ceci en accord avec les résultats de Sanchez [1]. On établit de plus que les tenseurs élastiques et viscoélastiques de mémoire courte sont les tenseurs homogénéisés (au sens élastique classique) des tenseurs initiaux. On donne une expression simple du noyau intégral du terme de mémoire longue.

MATHEMATICAL PROBLEMS IN MECHANICS. — Homogenization for Linearly Viscoelastic Bodies.

The homogenization process for a linearly viscoelastic Kelvin-Voigt solid is reexamined in a quasi-static setting. A term of delayed memory appears in the expression of the homogenized stressfields. The associated kernel is explicitely derived. The elastic and instantaneously viscoelastic parts of the homogenized stress field are given in terms of the corresponding homogenized elastic and viscoelastic coefficients.

1. LE PROBLÈME HÉTÉROGÈNE. — On considère un milieu viscoélastique de Kelvin-Voigt, qui occupe un domaine borné Ω de R^3, de structure εY périodique; $Y=\prod_{i=1}^{3}]0, Y_i[$ est la cellule de base, ε est le paramètre d'échelle. On note $a_{ijkh}(y)$ le tenseur des coefficients d'élasticité du matériau, et $b_{ijkh}(y)$ le tenseur des coefficients de viscosité. Le problème d'évolution considéré s'écrit :

$$(1)\qquad e_{ijx}(u^\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u^\varepsilon_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(2)\qquad \sigma^\varepsilon_{ij}=a_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e_{khx}(u^\varepsilon)+b_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e_{khx}\left(\frac{du^\varepsilon}{dt}\right) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial \sigma^\varepsilon_{ij}}{\partial x_j}+f_i=0, \quad \text{dans } \Omega,$$

où σ^ε et u^ε sont les champs de contraintes et de déplacement. On impose pour simplifier un déplacement nul sur le bord de Ω :

$$(4)\qquad u^\varepsilon_i=0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et on prend comme condition initiale :

$$(5)\qquad u^\varepsilon_i(x, 0)=u^\varepsilon_{0i}(x).$$

On suppose comme à l'habitude [2] que les tenseurs $(a_{ijkh}(y))$ et $(b_{ijkh}(y))$ sont symétriques, bornés et appartiennent à $L^\infty(Y)$. On considère alors sur $V=H^1_0(\Omega)^3$ le produit scalaire :

$$(6)\qquad (u, v)_{b^\varepsilon}=\int_\Omega b_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e_{khx}(u)\,e_{ijx}(v)\,dx.$$

Ce produit scalaire définit sur V une norme équivalente à la norme naturelle en vertu de l'inégalité de Korn [2]. On définit par le théorème de Riesz un opérateur linéaire, coercif et lipschitzien de V dans lui-même, en posant :

$$(7)\qquad (A^\varepsilon u, v)_{b^\varepsilon}=-\int_\Omega a_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e_{khx}(u)\,e_{ijx}(v)\,dx, \qquad \forall v\in V.$$

De la même façon on définit un second membre $g \in V$ par :

$$(g(t), v)_{h^\varepsilon} = \int_\Omega f_i(t) v_i \, dx, \qquad \forall v \in V$$

Si on suppose que $u_0 \in V$, le système (1)-(5) s'écrit sous forme d'une équation d'évolution dans V :

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{du^\varepsilon}{dt} = A^\varepsilon u^\varepsilon + g, \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \end{cases}$$

On suppose que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))^3$; la théorie des semi-groupes linéaires, de même que la théorie des équations différentielles classiques, permettent d'établir l'existence et l'unicité d'une solution $u^\varepsilon(t)$ de (8) possédant la régularité :

$$u^\varepsilon \in W^{1,2}(0, T; V).$$

Par la loi de comportement (2) on associe à ce champ de déplacement u^ε, un champ de contraintes σ^ε possédant la régularité :

$$\sigma^\varepsilon \in L^2(0, T; H) \qquad \text{où} \qquad H = L^2(\Omega)_s^9 = \{ \tau = (\tau_{ij}),\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega) \}.$$

2. Loi de comportement homogénéisée. — *Hypothèse.* — On suppose que l'état initial est élastique, i. e. qu'il existe $f_0 \in L^2(\Omega)^3$ en équilibre avec la contrainte élastique associée à u_0^ε :

$$(9) \qquad \sigma_{0ij}^\varepsilon = a_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_{khx}(u_0^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega, \qquad \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial x_j} 0\, ij + (f_0)_i = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On note $u_0^0 \in V$ la limite de u_0^ε dans V faible lorsque ε tend vers zéro : u_0^0 est solution du problème élastique homogénéisé associé à (9) [3].

Théorème. — *La solution* $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ *du problème* (1)-(5) *converge dans* $L^2(0, T; H)$ *faible* $\times W^{1,2}(0, T; V)$ *faible vers l'unique solution* (σ^0, u^0) *de :*

$$(10) \qquad \sigma_{ij}^0(t) = a_{ijkh}^{\text{hom}} e_{khx}(u^0(t)) + \int_0^t K_{ijkh}(t-s) e_{khx}\left(\frac{du^0}{dt}(s)\right) ds + b_{ijkh}^{\text{hom}} e_{khx}\left(\frac{du^0}{dt}(t)\right) \quad \textit{dans } \Omega$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \textit{dans } \Omega,$$

$$u^0 = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega$$

$$u^0(x, 0) = u_0^0(x).$$

Les tenseurs a^{hom} *et* b^{hom} *sont les tenseurs homogénéisés au sens élastique* [3] *des tenseurs* $a(y)$ *et* $b(y)$; $K(s)$ *est un tenseur du* 4^e *ordre, indépendant de la variable* x, *dont l'expression sera donnée dans la suite du texte.*

Expression complète de la loi homogénéisée. — On note $H_{\text{per}}^1(Y)$ l'espace des éléments périodiques de $H^1(Y)$. On pose $V_Y = H_{\text{per}}^1(Y)^3$. On définit sur $H^1(Y)^3$ deux formes bilinéaires continues, et coercives sur $V_Y/\{\text{vecteurs constants}\}$:

$$a_Y(\varphi, \psi) = \int_Y a_{ijkh}(y) e_{khy}(\varphi) e_{ijy}(\psi) \, dy,$$

$$b_Y(\varphi, \psi) = \int_Y b_{ijkh}(y) e_{khy}(\varphi) e_{ijy}(\psi) \, dy$$

où :

$$e_{ijy}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}\right).$$

On rappelle la définition des fonctions correctrices χ_{ij}^{a} et χ_{ij}^{b} associées aux opérateurs élastiques $a(y)$ et $b(y)$. $P_{ij}(y)$ est le vecteur dont la k-ième composante vaut $y_i \delta_{kj}$; χ_{ij}^{a} est solution de :

(11)
$$\begin{cases} \chi_{ij}^{a} \in V_Y, \\ a_Y(\chi_{ij}^{a}, \varphi) = -a_Y(P_{ij}, \varphi), \qquad \forall \varphi \in V_Y \end{cases}$$

(définition analogue pour χ_{ij}^{b} en échangeant a et b).
Les opérateurs homogénéisés a^{hom} et b^{hom} ont pour expression :

(12)
$$a_{ijkh}^{\text{hom}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ijpq}(y)\, e_{pqy}(\chi_{kh}^{a} + P_{kh})\, dy$$

(définition analogue pour b^{hom} en échangeant a et b).

Pour définir le noyau K on considère le problème d'évolution :

(13)
$$\begin{cases} \tilde{w}_{ij} \in V_Y, \\ b_Y\left(\dfrac{d\tilde{w}}{dt}ij, \varphi\right) + a_Y(\tilde{w}_{ij}, \varphi) = 0, \qquad \forall \varphi \in V_Y, \\ \tilde{w}_{ij}(y, 0) = \chi_{ij}^{b}(y) - \chi_{ij}^{a}(y). \end{cases}$$

La théorie des semi-groupes linéaires, de même que la théorie des équations différentielles classiques permettent d'établir l'existence et l'unicité d'une solution $\tilde{w}_{ij}$ de (13), possédant la régularité :

(14)
$$\tilde{w}_{ij} \in C^{\infty}([0, +\infty[; V_Y).$$

On définit alors un tenseur $\tilde{\sigma}_{ij}(y, t)$ dont la composante kh vaut :

$$\tilde{\sigma}_{ij|kh}(y, t) = a_{khpq}(y)\, e_{pqy}(\tilde{w}_{ij}(y, t)) + b_{khpq}(y)\, e_{pqy}\left(\frac{d\tilde{w}}{dt}ij(y, t)\right)$$

et on pose :

(15)
$$K_{ijkh}(t) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \tilde{\sigma}_{ij|kh}(y, t)\, dy.$$

Il résulte de (14) que :

$$K_{ijkh} \in C^{\infty}([0, +\infty[).$$

Remarque. — On peut donner une expression équivalente de la loi homogénéisée (10) plus agréable à calculer numériquement dans le cas d'une condition initiale nulle. Posons :

$$Q_{ijkh}(t) = K_{ijkh}(t) + a_{ijkh}^{\text{hom}},$$

alors :

$$\sigma_{ij}^{0}(t) = \int_0^t Q_{ijkh}(t-s)\, e_{khx}\left(\frac{du^0}{dt}(s)\right) ds + b_{ijkh}^{\text{hom}}\, e_{khx}\left(\frac{du^0}{dt}(t)\right)$$

et :

$$Q_{ijkh}(t) = \quad a_{ijpq}\, e_{pqy}(\tilde{\tilde{w}}_{kh} + P_{kh}) + b_{ijpq}\, e_{pqy}\left(\frac{d\tilde{\tilde{w}}}{dt}kh\right)$$

où $\tilde{\tilde{w}}_{ij} = \tilde{w}_{ij} + \chi_{ij}^{a}$ est solution de :

(16)
$$\begin{cases} \tilde{\tilde{w}}_{ij} \in V_Y \\ b_Y\left(\dfrac{d\tilde{\tilde{w}}}{dt}ij, \varphi\right) + a_Y(\tilde{\tilde{w}}_{ij}, \varphi) = -a_Y(P_{ij}, \varphi), \qquad \forall \varphi \in V_Y, \\ \tilde{\tilde{w}}_{ij}(y, 0) = \chi_{ij}^{b}(y). \end{cases}$$

Commentaires. — 1. On voit apparaître dans (10) un terme de mémoire longue de noyau $K_{ijkh}(t)$, ceci en accord avec [1], chap. 6. Il convient toutefois de souligner que notre expression de la contrainte homogénéisée (10) fait clairement apparaître les coefficients homogénéisés a_{ijkh}^{hom} et b_{ijkh}^{hom}.

2. Les propriétés de symétrie et de coercivité des tenseurs a_{ijkh} et b_{ijkh} permettent de montrer que la mémoire $K_{ijkh}(t)$ possède les symétries classiques, et décroît exponentiellement lorsque t tend vers $+\infty$.

3. La détermination complète de la loi homogénéisée (10) [prise sous la forme (16)] nécessite donc la résolution de six problèmes élastiques avec une matrice de rigidité associée au tenseur $b(y)$ (détermination de χ_{ij}^b); la résolution des six problèmes d'évolution pour $\tilde{\tilde{w}}_{ij}$ ne fait intervenir que la matrice de rigidité précédemment calculée.

4. On peut établir directement l'existence et l'unicité d'une solution du problème homogénéisé (10) par une méthode de point fixe inspirée de la technique de Cauchy-Lipschitz.

5. On peut se passer de l'hypothèse « état initial élastique ». Il convient alors d'ajouter à la contrainte homogénéisée un terme supplémentaire dû à la condition initiale. La démonstration du résultat d'homogénéisation nécessite alors des hypothèses spécifiques sur le comportement de u_0^ε que nous ne détaillerons pas ici. A titre d'exemple voici deux cas où cette démonstration est possible sans hypothèse supplémentaire :

(*a*) $u_0^\varepsilon = u_0$ indépendant de ε : le terme de contrainte supplémentaire est alors :

$$\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y a_{khpq}(y)\, e_{pqy}(\tilde{w}_{ij}(y,\, t))\, dy\right] e_{khx}(u_0^0),$$

(*b*) u_0^ε est en équilibre élastique pour l'opérateur b^ε [remplacer a_{ijkh}^ε par b_{ijkh}^ε dans (9)] : le terme de contraintes supplémentaire est alors :

$$K_{ijkh}(t)\, e_{khx}(u_0^0).$$

6. On retrouve tous ces résultats (y compris les termes supplémentaires dus à la condition initiale) par la méthode des moyennes, ou par développements asymptotiques.

(*) Remise le 20 décembre 1982.

[1] E. Sanchez Palencia, *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory* (*Lecture Notes in Phys.*, n° 127, 1980).

[2] G. Duvaut et J. L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.

[3] G. Duvaut, *Analyse fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus...*, In: *Th. and Appl. Mech.*, W. Koiter, éd., North-Holland, Amsterdam, 1976, p. 119-132.

G. F. :

D. L. et P. S. : *Mécanique théorique*, Tour n° 66, 4, *place Jussieu*, 75230, *Paris Cedex* 05; et G.R.E.C.O. « *Grandes déformations et endommagement* ».