Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 312, p. 301–307, 1991.

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA MÉCANIQUE. — *Comportement effectif d'un mélange de matériaux élastiques isotropes ayant le même module de cisaillement.* Note de **Gilles FRANCFORT** et **Luc TARTAR**.

On montre qu'il n'existe qu'un seul matériau élastique homogénéisé résultant du mélange de matériaux isotropes ayant le même module de cisaillement et on caractérise ce matériau explicitement. On en déduit, dans l'esprit des travaux de HILL, les bornes d'HASHIN–SHTRIKMAN sur le module de déformation volumique d'un mélange de matériaux isotropes en proportions fixées.

MATHEMATICAL PROBLEMS IN MECHANICS. — Effective behaviour of a mixture of isotropic materials with identical shear moduli.

The uniqueness of the homogenized elastic material resulting from a mixture of isotropic materials with identical shear moduli is established and its specific behaviour is characterized explicitly. HASHIN–SHTRIKMAN bounds on the bulk modulus of a mixture of isotropic materials in prescribed volume fractions are then derived, in the spirit of the work of HILL.

Abridged English version

The theory of homogenization provides a good mathematical framework for the study of the effective behaviour of fine mixtures of materials. The effective material is understood as that associated to the asymptotic response of a sequence of problems with given microstructures; the sequence is indexed by the parameter ε which characterizes the typical size of the heterogeneities and is assumed to tend to zero. This approach was developped by MURAT & TARTAR [8], [10] under the label of H-convergence and by SPAGNOLO [9] under that of G-convergence.

In the setting of linearized elasticity the relevant sequence $A^\varepsilon(x)$ is a sequence of fourth order tensors that satisfy the usual symmetry properties together with uniform boundedness and coercivity properties as described by (1a)–(1c) below. The set of all tensors satisfying (1) below is denoted by $M(\alpha,\beta)$.

A precise definition of H-convergence is given in Definition 1 below and a compactness result (Theorem 1) permits to ascertain the existence of a H-limit A^0 for a subsequence of a sequence A^ε of elements of $M(\alpha,\beta)$.

Our first result, given by Theorem 2 below, states that if the sequence A^ε under consideration is associated to a sequence of isotropic materials with quasi-constant shear moduli $\mu^\varepsilon(x)$, i.e. if

$$\mu^\varepsilon(x) \to \mu(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^N,$$

as ε tends to zero, then the possible H-limits are reduced to a single tensor A^0. That tensor is isotropic (cf. (5)), its shear modulus is $\mu(x)$ and its Lamé coefficient $\lambda(x)$ is given by

$$\frac{1}{\lambda^\varepsilon + 2\mu} \rightharpoonup \frac{1}{\lambda + 2\mu} \text{ weak } \star \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

where $\lambda^\varepsilon(x)$ is the corresponding Lamé coefficient for $A^\varepsilon(x)$.

Note that whenever attention is restricted to the mixture of two isotropic materials this result has been known since the work of HILL [4b]; see also LUR'IE, CHERKAEV & FEDOROV [5] for a similar two-phase two-dimensional plate result.

Our second result generalizes Hashin-Shtrikman bulk modulus bounds which pertain to the possible bulk moduli for two phase isotropic mixtures of isotropic materials in fixed volume fraction. This is the object of Theorem 3 below which is concerned with any H-converging sequence A^ε of isotropic tensors whose shear moduli $\mu^\varepsilon(x)$ are bounded above and below by fixed positive functions $\overline{\mu}(x)$ and $\underline{\mu}(x)$. The resulting H-limit A^0 is found to satisfy a tensorial inequality, namely

$$\underline{A}(x) \le A^0(x) \le \overline{A}(x), \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N,$$

where $\underline{A}(x)$ and $\overline{A}(x)$ are isotropic tensors with shear moduli $\underline{\mu}(x)$ and $\overline{\mu}(x)$ and with bulk moduli $\underline{K}(x)$ and $\overline{K}(x)$ given by the following limits as ε tends to zero

$$\frac{1}{NK^\varepsilon + 2(N-1)\underline{\mu}} \rightharpoonup \frac{1}{N\underline{K} + 2(N-1)\underline{\mu}} \text{ weak } \star \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

$$\frac{1}{NK^\varepsilon + 2(N-1)\overline{\mu}} \rightharpoonup \frac{1}{N\overline{K} + 2(N-1)\overline{\mu}} \text{ weak } \star \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

The proof of Theorem 3 is elementary: it consists in bounding $A^\varepsilon(x)$ from above and below by isotropic tensors with the same bulk moduli as A^ε and with respectively $\overline{\mu}(x)$ and $\underline{\mu}(x)$ as shear moduli. Theorem 2 is applied to these two bounding sequences of isotropic tensors and the result follows from a straightforward order preserving argument for H-converging sequences. As such this proof can be viewed as a generalization of an argument due to Hill in his work on Hashin-Shtrikman bulk modulus bounds [4a].

Straightforward applications of Theorem 3 permit to recover most available bulk modulus type bounds (cf. Theorems 4 and 5 below). The simplicity of our derivation has to be contrasted with the elaborate character of the previous works (cf. e.g. [2]. [3], [7]).

1. Présentation des résultats.

L'étude du comportement effectif de mélanges fins de matériaux est maintenant bien formalisée mathématiquement à l'aide de la théorie de l'homogénéisation. On y assimile la notion de matériau effectif au comportement asymptotique d'une suite de problèmes, correspondant chacun à un mélange déterminé, lorsque la taille des hétérogénéités devient très petite : c'est la notion de H-convergence développée par Murat & Tartar [8], [10], ou de G-convergence développée par Spagnolo [9]. Dans le cas de l'élasticité linéarisée on est ainsi amené (cf. [2]) à considérer une suite $A^\varepsilon(x)$ de tenseurs d'ordre 4 satisfaisant pour toute valeur du paramètre ε:

$$(1)_a \qquad A^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^4})$$

$$(1)_b \qquad A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x) = A^\varepsilon_{j,i,k,\ell}(x) = A^\varepsilon_{k,\ell,i,j}(x), \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

$$(1)_c \qquad \alpha e_{i,j}e_{i,j} \leq A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x)e_{i,j}e_{k,\ell} \leq \beta e_{i,j}e_{i,j}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N\ \forall e \text{ matrice symétrique sur } \mathbb{R}^N$$

où α et β sont des constantes strictement positives; on utilisera systématiquement ici la convention de sommation d'Einstein. On note $M(\alpha,\beta)$ l'ensemble des tenseurs d'ordre 4 vérifiant (1).

Définition 1. *On dit que $A^\varepsilon \in M(\alpha,\beta)$ H-converge vers $A^0 \in M(\alpha,\beta)$ si, pour tout f dans $\left(H^{-1}(\Omega)\right)^N$, la solution $(u^\varepsilon,\sigma^\varepsilon)$ (unique dans $\left(H^1_0(\Omega)\right)^N \times \left(L^2(\Omega)\right)^{N^2}$) de*

$$e_{i,j}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^\varepsilon_j}{\partial x_i}\right) \text{ dans } \Omega$$

$$\sigma^\varepsilon_{i,j} = A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}e_{k,\ell}(u^\varepsilon) \text{ dans } \Omega$$

$$-\frac{\partial \sigma^\varepsilon_{i,j}}{\partial x_j} = f_i \text{ dans } \Omega$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

converge faiblement dans $\left(H^1_0(\Omega)\right)^N \times \left(L^2(\Omega)\right)^{N^2}$, quand ε tend vers 0, vers la solution (u,σ) (unique dans $\left(H^1_0(\Omega)\right)^N \times \left(L^2(\Omega)\right)^{N^2}$) de

$$\sigma_{i,j} = A^0_{i,j,k,\ell}e_{k,\ell}(u) \text{ dans } \Omega$$

$$-\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} = f_i \text{ dans } \Omega$$
$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

L'intérêt d'une telle définition réside dans le théorème de compacité suivant [2], [8], [10] qui traduit l'existence d'un matériau effectif.

Théorème 1. *De toute suite A^ε d'éléments de $M(\alpha,\beta)$ on peut extraire une sous-suite qui H-converge vers un élément A^0 de $M(\alpha,\beta)$.*

Notre premier résultat donne une formule explicite de la H-limite A^0 d'une suite de tenseurs A^ε qui représentent des matériaux isotropes dont le module de cisaillement μ^ε est essentiellement constant:

Théorème 2. *On considére une suite de tenseurs A^ε qui représentent des matériaux élastiques linéarisés isotropes, i.e.*

$$A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x) = \lambda^\varepsilon(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell} + \mu^\varepsilon(x)\,(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} + \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}),\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

où $\lambda^\varepsilon(x)$, $\mu^\varepsilon(x)$ sont les coefficients de Lamé de $A^\varepsilon(x)$. On suppose que, quand ε tend vers 0,

$$\alpha \le 2\mu^\varepsilon(x), N\,K^\varepsilon(x) \equiv N\,\lambda^\varepsilon(x) + 2\mu^\varepsilon(x) \le \beta,\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

$$\mu^\varepsilon(x) \to \mu(x)\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Si A^ε H-converge vers A^0, alors A^0 est donné par

$$A^0_{i,j,k,\ell}(x) = \lambda(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell} + \mu(x)\,(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} + \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}),\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

où

$$\frac{1}{\lambda^\varepsilon + 2\mu} \rightharpoonup \frac{1}{\lambda + 2\mu}\ \text{faible } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{6}$$

Remarque 1. Le Théorème 2 affirme qu'il existe un seul matériau effectif possible lorsqu'on homogénéise un mélange de matériaux isotropes ayant le même module de cisaillement μ; ce matériau est isotrope et son module de cisaillement est μ; son module de déformation volumique est $K = \lambda + \dfrac{2\mu}{N}$ où λ est donné par (6). En l'absence de convergence forte de μ^ε vers μ on ne saura pas déterminer de façon unique le matériau résultant et on obtiendra un ensemble de matériaux possibles qu'il s'agira de borner (cf. e.g. [2], [3], [7]).

Remarque 2. Dans le cas du mélange de deux matériaux isotropes de même module de cisaillement l'analogue du théorème était connu depuis les travaux de Hill ([4b], Section 6). Dans le cas bidimensionel et pour le mélange de deux matériaux le résultat du théorème 2 a été obtenu par Lur'ie, Cherkaev et Fedorov [5] dans le cadre des équations des plaques.

Remarque 3. Dans l'esprit du théorème 2 on peut facilement établir que si (2) et (3) sont vérifiés et si $K^\varepsilon(x) \to K(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, alors le tenseur homogénéisé $A^0(x)$ admet la matrice identité comme vecteur propre correspondant à la valeur propre $K(x)$.

Notre deuxième résultat généralise les bornes d'Hashin–Shtrikman sur les modules de déformation volumique des matériaux obtenus par homogénéisation d'un mélange de deux matériaux isotropes en proportions fixées.

Théorème 3. *Soit A^ε une suite de tenseurs isotropes (i.e. de la forme (2)) qui vérifie (3) et qui H-converge vers A^0. Soient $\underline{\mu}(x)$ et $\overline{\mu}(x)$ deux fonctions telles que*

$$\alpha \le \underline{\mu}(x) \le \mu^\varepsilon(x) \le \overline{\mu}(x) \le \beta\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

Alors

$$(8)\qquad \underline{\lambda}(x)\,(e_{i,i})^2 + 2\underline{\mu}(x)\,e_{i,j}e_{i,j} \le A^0_{i,j,k,\ell}(x)\,e_{i,j}e_{k,\ell} \le \overline{\lambda}(x)\,(e_{i,i})^2 + 2\overline{\mu}(x)\,e_{i,j}e_{i,j},\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

$\forall e$ matrice symétrique sur $\mathbb{R}^N$, où $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ sont définis par

$$(9)_a\qquad \underline{\lambda}(x) = \underline{K}(x) - \frac{2\underline{\mu}(x)}{N}, \overline{\lambda}(x) = \overline{K}(x) - \frac{2\overline{\mu}(x)}{N},\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

$$(9)_b\qquad \frac{1}{N\,K^\varepsilon + 2(N-1)\,\underline{\mu}} \rightharpoonup \frac{1}{N\underline{K} + 2(N-1)\,\underline{\mu}}\ \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

$$(9)_c\qquad \frac{1}{N\,K^\varepsilon + 2(N-1)\,\overline{\mu}} \rightharpoonup \frac{1}{N\,\overline{K} + 2(N-1)\,\overline{\mu}}\ \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Le théorème 3 a pour conséquence immédiate les bornes optimales d'Hashin–Shtrikman sur le module de déformation volumique des matériaux obtenus par homogénéisation des mélanges à proportions fixées de deux matériaux isotropes donnés (cf. e.g. [2], [3], [4a], [7]). La démonstration donnée dans cette note est élémentaire et généralise celle de Hill [4a] pour l'obtention des bornes sur le module de déformation volumique.

Théorème 4. *On considère deux matériaux isotropes de tenseurs d'élasticité A_1 et A_2 où*

$$(10)_a\qquad (A_\alpha)_{i,j,k,\ell} = \lambda_\alpha \delta_{i,j}\delta_{k,\ell} + \mu_\alpha(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} + \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}), (\alpha = 1,2)$$

$$(10)_b\qquad K_\alpha = \lambda_\alpha + \frac{2\mu_a}{N}, (\alpha = 1,2)$$

avec $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ et $0 < \mu_1 \le \mu_2$. Si

$$(11)\qquad A^\varepsilon(x) = \chi^\varepsilon(x)\,A_1 + \big(1 - \chi^\varepsilon(x)\big)\,A_2,\ \chi^\varepsilon(x)\big(1-\chi^\varepsilon(x)\big) = 0,\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

et si

$$(12)_a\qquad A^\varepsilon\ \text{H-converge vers } A^0,$$

$$(12)_b\qquad \chi^\varepsilon \rightharpoonup \theta, (\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^N))\ \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

où de plus A^0 est isotrope, i.e.

$$(13)_a\qquad A^0_{i,j,k,\ell}(x) = \lambda(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell} + \mu(x)\,(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} + \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}),\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

$$(13)_b\qquad K(x) = \lambda(x) + \frac{2\mu(x)}{N},\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N$$

alors

$$(14)\qquad \underline{K}(x) \le K(x) \le \overline{K}(x)$$

où

$$\frac{1}{N\,\underline{K}(x)+2(N-1)\,\mu_1}=\frac{\theta(x)}{N\,K_1+2(N-1)\,\mu_1}+\frac{1-\theta(x)}{N\,K_2+2(N-1)\,\mu_1}\ (\textit{ resp. } \overline{K}(x),\mu_2). \tag{15}$$

Enfin si le mélange des deux matériaux isotropes (supposés cette fois bien ordonnés, i.e. $K_1 \leq K_2$) est anisotrope on déduit facilement du théorème 3 les bornes (optimales) de KOHN et MILTON sur le module de déformation volumique généralisé (cf. [7], (6.33), (6.35)).

Théorème 5. *Sous les hypothèses (10)-(12) et si de plus*

$$K_1 \leq K_2 \tag{16}$$

le tenseur $A^0(x)$ satisfait

$$\left(A^0(x)-A_1\right)^{-1}_{i,i,j,j} \leq \frac{1}{\underline{K}(x)-K_1},\ \left(A_2-A^0(x)\right)^{-1}_{i,i,j,j} \leq \frac{1}{K_2-\overline{K}}(x),\ \textit{p.p. } x\in\mathbb{R}^N,$$

où $\underline{K}(x)$ et $\overline{K}(x)$ sont donnés par (15).

Notons que dans un travail récent, MILTON a considéré des situations plus générales où la condition (16) n'est pas nécessairement vérifiée (cf. (15.38) [6]).

2. Démonstration des résultats.

2.1 Démonstration du théorème 2. La première étape consiste à montrer l'isotropie de la H-limite A^0 de A^ε sous les hypothèses (2)-(4). Pour ce faire on rappelle (cf. [2], [8], [10]) l'existence, pour toute matrice symétrique $e^0_{i,j}$ $(1\leq i,j\leq N)$ et tout domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$, d'un champ de vecteurs u^ε défini sur Ω tel que

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \equiv e^0_{i,j}x_j \text{ faible dans } H^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \tag*{$(17)_a$}$$

$$\sigma^\varepsilon_{i,j}=A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}e_{k,\ell}(u^\varepsilon) \rightharpoonup \sigma^0_{i,j}\equiv A^0_{i,j,k,\ell}e^0_{k,\ell} \text{ faible dans } L^2(\Omega;R^{N^2}), \tag*{$(17)_b$}$$

$$-\frac{\partial\sigma^\varepsilon_{i,j}}{\partial x_j}\equiv g^\varepsilon_i, g^\varepsilon\in \text{ compact de } H^{-1}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag*{$(17)_c$}$$

Au vu de (2) et de (4),

$$\sigma^0_{i,j}=\alpha\,\delta_{i,j}+2\mu e_{i,j}$$

où α désigne la limite faible dans $L^2(\Omega)$ d'une sous-suite de $\lambda^\varepsilon div(u^\varepsilon)$. En choisissant pour $(p,q)\in\{1,\ldots,N\}^2$ fixés

$$e^0_{i,j}=\frac{1}{2}(\delta_{i,p}\delta_{j,q}+\delta_{i,q}\delta_{j,p})$$

et en utilisant la symétrie $A^0_{i,j,p,q}=A^0_{pqij}$ de A^0 et le caractère arbitraire de Ω on déduit l'isotropie de A^0 qui s'écrit comme dans (5). De plus

$$\alpha(x)=\lambda(x)\,tr(e^0),\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N. \tag{18}$$

Dans une deuxième étape on va se ramener au cas où $\mu^\varepsilon(x)$ est une fonction régulière indépendante de ε. Soit μ_η une suite de fonctions régulières sur $\mathbb{R}^N$ qui converge presque partout et faible $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ vers μ quand η tend vers 0. Il est loisible de supposer que l'approximation choisie μ_η de μ est telle que A^ε_η, défini par

$$(A^\varepsilon_\eta)_{i,j,k,\ell}(x)=\lambda^\varepsilon(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell}+\mu_\eta(x)(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}+\delta_{i,\ell}\delta_{j,k}),\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N,$$

appartient à $M(\alpha,\beta)$ et, au vu du théorème 1, que pour η fixé, une sous-suite (en ε) de A^ε_η H-converge vers A^0_η. De plus,

$$\left|A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x)-(A^\varepsilon_\eta)_{i,j,k,\ell}(x)\right|\le C\,|\mu^\varepsilon(x)-\mu_\eta(x)|\le C(|\mu^\varepsilon(x)-\mu(x)|+|\mu(x)-\mu_\eta(x)|) \tag{19}$$

où C est une constante qui ne dépend que de la dimension N. Comme le terme de droite de (19) converge presque partout vers $C\,|\mu(x)-\mu_\eta(x)|$ avec ε, l'analogue pour l'élasticité d'un théorème de Colombini et Spagnolo ([1], théorème 2.2), théorème qui repose sur le théorème de régularité de Meyers pour les équations elliptiques à coefficients discontinus, permet de passer à la limite dans (19); on obtient :

$$\left|A^0_{i,j,k,\ell}(x)-(A^0_\eta)_{i,j,k,\ell}(x)\right|\le C'\,|\mu(x)-\mu_\eta(x)|\,,\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N,$$

où C' est une constante qui ne dépend pas de η. La convergence presque partout de μ_η vers μ permet alors de conclure que A^0_η converge presque partout vers A^0 avec η. Or la première étape appliquée à A^ε_η en lieu et place de A^ε assure l'isotropie de A^0_η qui s'écrit donc,

$$(A^0_\eta)_{i,j,k,\ell}(x)=\lambda_\eta(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell}+\mu_\eta(x)\,(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}+\delta_{i,\ell}\delta_{j,k}),\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N, \tag{20}$$

On en déduit que λ_η converge presque partout dans $\mathbb{R}^N$ vers λ quand η tend vers 0.

La troisième étape consiste à caractériser $\lambda_\eta(x)$ dans (20). Pour ce faire on considère u^ε_η associé à A^ε_η par l'analogue de (17); le champ u^ε_η vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\lambda^\varepsilon div(u^\varepsilon_\eta)\big)+\frac{\partial}{\partial x_j}\big(2\mu_\eta e_{i,j}(u^\varepsilon_\eta)\big)=g^\varepsilon_i, 1\le i\le N. \tag{21}$$

En dérivant (21) par rapport à x_i et en utilisant le caractère régulier de μ_η on obtient après sommation en i

$$\Delta\big((\lambda^\varepsilon+2\mu_\eta)\,div(u^\varepsilon_\eta)\big)=div(g^\varepsilon)+R^\varepsilon$$

où R^ε est une somme de produits de dérivées d'ordre 1 ou 2 de μ_η par des dérivées d'ordre 1 ou 2 de u^ε_η; R^ε est donc borné dans $H^{-1}(\Omega)$ et compact dans $H^{-2}(\Omega)$, alors que $div(g^\varepsilon)$ est compact dans $H^{-2}_{loc}(\Omega)$. Puisque $k^\varepsilon\equiv(\lambda^\varepsilon+2\mu_\eta)div(u^\varepsilon_\eta)$ est borné dans $L^2(\Omega)$ la régularité du Laplacien implique que k^ε est compact dans $L^2_{loc}(\Omega)$. Or l'analogue de (18) implique que, pour η fixé,

$$(\lambda^\varepsilon+2\mu_\eta)div(u^\varepsilon_\eta)\rightharpoonup(\lambda_\eta+2\mu_\eta)tr(e^0)\text{ faible dans } L^2(\Omega).$$

Désignant par $\frac{1}{\overline{\lambda}_\eta}+2\mu_\eta$ la limite faible en ε de $\frac{1}{\lambda^\varepsilon}+2\mu_\eta$ on obtient finalement

$$\lambda_\eta(x)=\overline{\lambda}_\eta(x),\ \text{p.p. } x\in\Omega.$$

Comme $\overline{\lambda}_\eta$ converge presque partout vers λ donné par (6) quand η tend vers 0 on obtient le résultat souhaité puisque Ω est arbitraire.

2.2. Démonstration du théorème 3. La démonstration est donnée pour l'inégalité de gauche de (8); l'autre borne s'obtient de façon similaire. On définit λ^ε et A^ε par

$$\underline{\lambda}^\varepsilon_\eta(x)+\frac{2\underline{\mu}(x)}{N}=\lambda^\varepsilon(x)+\frac{2\mu^\varepsilon(x)}{N},\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N,$$

$$\underline{A}^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x)=\underline{\lambda}^\varepsilon(x)\,\delta_{i,j}\delta_{k,\ell}+\underline{\mu}(x)(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}+\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}),\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N$$

Comme la relation d'ordre sur les tenseurs symétriques d'ordre 4 se ramène à une relation d'ordre sur μ et $N\lambda+2\mu$ dans le cas de tenseurs isotropes

$$\underline{A}^\varepsilon_{i,j,k,\ell}(x)\,e_{i,j}e_{k,\ell}\le A^\varepsilon_{i,j,k,\ell}e_{i,j}e_{k,\ell},\ \text{p.p. } x\in\mathbb{R}^N,\ \forall e \text{ matrice symétrique.} \tag{22}$$

La relation d'ordre (22) se préserve lors du passage à la H-limite. Mais $\underline{A}^\varepsilon$ appartient aussi à $M(\alpha,\beta)$ et il est donc possible de supposer que $\underline{A}^\varepsilon$ H-converge vers un tenseur $\underline{A}^0$; alors

$$\underline{A}^0_{i,j,k,\ell}(x)\, e_{i,j}e_{k,\ell} \le A^0_{i,j,k,\ell}e_{i,j}e_{k,\ell}, \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N, \ \forall e \text{ matrice symétrique.} \tag{23}$$

Au vu du théorème 2 $\underline{A}^0$ est parfaitement déterminé : il s'agit d'un tenseur isotrope dont les coefficients de Lamé sont donnés par $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mu}$, $\underline{\lambda}$ étant défini par (9). L'inégalité (23) démontre l'inégalité de gauche de (8).

2.3 Démonstration des théorèmes 4 et 5. Les inégalités (14) du théorème 4 se déduisent immédiatement du théorème 3 en prenant $\underline{\mu}(x) = \mu_1$ et $\overline{\mu}(x) = \mu_2$ dans (7) et en appliquant (8) à la matrice identité ($e_{i,j} = \delta_{i,j}$). L'idée de la démonstration du théorème 5 est la suivante : après avoir soustrait à l'inégalité de gauche (resp. de droite) de (8) le terme $(A_1)_{i,j,k,\ell}e_{i,j}e_{k,\ell}$ (resp. $(A_2)_{i,j,k,\ell}e_{i,j}e_{k,\ell}$ on réécrit les inégalités obtenues en fonction des matrices inverses de $A^0 - A_1$ et $A^0 - A_2$, ce qui est loisible au vu du caractère bien ordonné (cf. (16)) de A_1 et A_2; on spécialise alors les inégalités obtenues à la matrice identité.

Remerciement Le second auteur a bénéficié d'un contrat de recherche de la National Science Fundation, DMS-8803317.

Références

[1] F. Colombini & S. Spagnolo, "Sur la convergence des solutions d'équations paraboliques," J. Math. Pures et Appl., 56, 1977, 263–306.
[2] G.A. Francfort & F. Murat, "Homogenization and optimal bounds in linear elasticity," Arch. Rat. Mech. Anal., 94, 4, 1986, 307–334.
[3] Z. Hashin & S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials," J. Mech. Phys. Solids, 11, 1963, 127–140.
[4a] R. Hill, "Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles," J. Mech. Phys. Solids, 11, 1963, 357–372.
[4b] R. Hill, "Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour," J. Mech. Phys. Solids, 12, 1964, 199–212.
[5] K.A Lur'ie & A.V. Cherkaev & A.V. Fedorov, "Regularization of optimal design problems for bars and plates," Part 2, J. Optim. Th. Appl., 37, 4, 1982.
[6] G.W. Milton, "On characterizing the set of possible effective tensors of composites: the variational method and the translation method," Comm. Pure Appl. Math., 43, 1990, 63–125
[7] G.W. Milton & R.V. Kohn, "Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites," J. Mech. Phys. Solids, 36, 6, 1988, 577–629.
[8] F. Murat, "H-convergence," Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique 1977/1978, Université d'Alger.
[9] S. Spagnolo, "Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellitiche," Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22, 1968, 577–597.
[10] L. Tartar, "Estimations fines de coefficients homogénéisés," *Ennio de Giorgi Colloquium, P. Krée ed.*, 168–175, *Research Notes in Mathematics* 125, *Pitman, London*, 1985.

Gilles Francfort
Laboratoire Central des Ponts et Chaussés
58 Boulevard Lefébvre
75732 Paris Cédex 15

Luc Tartar
Department of Mathematics
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15213-3890